

## REPRESENTACIÓN DE LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN $f(x) = \frac{2-x^2}{x^2-1}$

### 1. DOMINIO, CONTINUIDAD, PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES.

- $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ , luego  $D(f) = \mathbf{R} - \{-1, 1\}$ .
- $f(x)$  es continua en su dominio por ser cociente de funciones continuas.
- Cortes con el eje OX:  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-x^2}{x^2-1} = 0 \Rightarrow 2-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$
- Cortes con el eje OY:  $f(0) = \frac{2-0^2}{0^2-1} = -2$

### 2. SIMETRÍAS Y PERIODICIDAD

- $f(-x) = \frac{2-(-x)^2}{(-x)^2-1} = \frac{2-x^2}{x^2-1} = f(x)$
- Luego  $f(-x) = f(x)$  y la función es par (simétrica respecto del eje OY).
- No es periódica por ser una fracción algebraica.

### 3. RAMAS INFINITAS Y ASÍNTOTAS.

- Horizontales:

Por ser  $f(x)$  un cociente de polinomios de igual grado, los límites siguientes son los cocientes de los coeficientes de  $x^2$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow y = -1 \text{ asíntota horizontal}$$

Además,

$$f(x) - (-1) = \frac{2-x^2}{x^2-1} - (-1) = \frac{1}{x^2-1}.$$

$$\frac{1}{x^2-1} > 0 \text{ si } x^2-1 > 0, \text{ es decir, cuando } x > 1 \text{ o } x < -1.$$

Por tanto, la gráfica está por encima de la asíntota.

- Verticales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2-x^2}{(x+1)(x-1)} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2-x^2}{(x+1)(x-1)} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow x = -1 \text{ A.V.}$$
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2-x^2}{(x+1)(x-1)} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2-x^2}{(x+1)(x-1)} = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow x = 1 \text{ A.V.}$$

### 4. MONOTONÍA:

- Monotonía:

$$f'(x) = \frac{-2x(x^2-1) - (2-x^2)2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x^3 + 2x - 4x + 2x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Puntos de discontinuidad para  $f'(x)$ :  $x = -1$ ;  $x = 1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
Signo de $f'(x)$	$f'(-2) > 0$	$f'(-1/2) > 0$	$f'(1/2) < 0$	$f'(2) < 0$
$f(x)$	creciente	creciente	decreciente	decreciente

Como  $f(x)$  es creciente por la izquierda de 0 y decreciente por la derecha, en  $x = 0$  hay un máximo relativo. Punto  $(0, -2)$ .

### Resumen:

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$  y  $f(x)$  continua en  $\text{Dom}(f)$ .
- Asíntotas
  - $y = -1$  asíntota horizontal (la curva se acerca por encima de la asíntota)
  - $x = -1$  asíntota vertical (izquierda:  $+\infty$ ; derecha:  $-\infty$ )
  - $x = 1$  asíntota vertical (izquierda:  $-\infty$ ; derecha:  $+\infty$ )
- Monotonía:
  - $f(x)$  creciente en  $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
  - $f(x)$  decreciente en  $(0, 1) \cup (1, \infty)$
- En  $x = 0$  hay un máximo relativo. Punto  $(0, -2)$
- Tabla de valores:

<b>x</b>	-2	$-\sqrt{2}$	-1,3	0	1,3	$\sqrt{2}$	2
<b>f(x)</b>	-0,67	0	0,45	-2	0,45	0	-0,67

